О СПЕКТРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Расолько Г. А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: rasolka@bsu.by

Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первого рода базируется на следующем свойстве классических ортогональных многочленов Чебышева для сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x), \quad |x|<1, \quad n\ge 0,\\ &\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_{n-1}(t)dt}{t-x}=-T_n(x), \quad |x|<1, \quad n\ge 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

В [1 – 4] для более общего сингулярного оператора – сингулярного характеристического интегрального оператора второго рода

$$K^0(u;x)=A(x)Z(x)u(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}B(t)Z(t)\frac{u(t)}{t-x}dt, \qquad -1<x<1, \tag{2}$$

(функции $A(x), B(x)-$ заданы, $Z(x)$ известным образом вычисляется через заданные функции, $u(x)-$ искомая функция) получены аналоги формул (1)

$$K^0(T_{k+\chi};x)=\alpha_0^kU_0(x)+\alpha_1^kU_1(x)+\ldots+\alpha_k^kU_k(x), \quad k=0,1,\ldots, \quad \chi\ge 0, \tag{3}$$

$$K^0(U_{k-|\chi|};x)=\beta_0^kT_0(x)+\beta_1^kT_1(x)+\ldots+\beta_k^kT_k(x), \quad k=|\chi|,|\chi|+1,\ldots, \quad \chi<0, \tag{4}$$

где значение целочисленной величины χ определяется через $A(x), B(x)-$ и связана с классом функций, в котором ищется решение уравнения $K^0(u;x)=f(x)$. Коэффициенты α_j^k, β_j^k вычисляются через коэффициенты многочленов $T_{k+\chi}(x), U_{k-|\chi|}(x)$ и коэффициенты разложения на бесконечности канонической функции задачи линейного сопряжения. Коэффициенты разложения канонической функции не тривиальным образом связаны с коэффициентами $A(x), B(x)-$ и классом, в котором ищется решение, и в случае оператора с произвольными комплексными коэффициентами, как правило, вычисляются приближенно с использованием сплайн-интерполирования и приближенного вычисления интегралов Коши.

С оператором (2) приходится иметь дело при решении интегрального уравнения

$$a(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}b(t)\varphi(t)\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \quad -1<x<1, \tag{5}$$

играющего ключевую роль в теории сингулярных интегральных уравнений. Здесь $a(x),\ b(x)-$ заданные комплекснозначные функции непрерывные по Гельдеру – коэффициенты уравнения (5), причем $a^2(x)-b^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in[-1,1],\ \ k(x,t),\ f(x)-$ заданные комплекснозначные функции, непрерывные по Гельдеру (первая по обеим переменным), $\varphi(x)$ – искомая функция. Функции же $A(x), B(x),\ \varphi(x),\ Z(x)$ определяются следующим образом: $A(x)=\dfrac{a(x)}{a^2(x)-b^2(x)}$, $B(x)=\dfrac{b(x)}{a^2(x)-b^2(x)}$, $\varphi(x)=\dfrac{Z(x)u(x)}{a^2(x)-b^2(x)}$, $Z(x)=[a(x)+b(x)]\mathrm{X}^{+}(x)=[a(x)-b(x)]\mathrm{X}^{-}(x),\ |x|<1.$ Имеет место представление: $Z(x)=(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}Z_0(x), \mathrm{Re}\,\alpha,\mathrm{Re}\,\beta>-1,\ Z_0(x)-$ ограниченная функция, $\mathrm{X}^{\pm}(x)-$ предельные значения канонической функции $\mathrm{X}(z)$ задачи линейного сопряжения $\mathrm{X}^{+}(x)=\dfrac{a(x)-b(x)}{a(x)+b(x)}\mathrm{X}^{-}(x),\ -1<x<1.$

В [1 – 4], используя разложения вида (3) – (4) (и некоторые другие), получены вычислительные схемы численного решения уравнения (5).

В случае, когда коэффициенты уравнения (5) имеют частное значение, а именно: комплекснозначные постоянные, вещественные постоянные, или уравнение (5) представляет собой уравнение первого рода, коэффициенты разложения (3) – (4) удается упростить, используя возможности компьютерной алгебры систем компьютерной математики, например, Mathematica.

В докладе предлагаются спектральные методы численного решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Коши

$$a\varphi(x)+\frac{b}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x),\quad -1<x<1,$$

где $a,\ b-$ заданные комплекснозначные постоянные, $k(x,t),\ f(x)-$ заданные комплекснозначные функции, непрерывные по Гельдеру (первая по обеим переменным),

$$a\varphi(x)+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x),\quad -1<x<1,$$

где $a,\ b-$ заданные вещественные постоянные, $k(x,t),\ f(x)-$ заданные вещественные функции, непрерывные по Гельдеру (первая по обеим переменным), и сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x),\quad -1<x<1,$$

основанные на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева.

Литература

1. Расолько Г. А., Шешко М. А. Применение многочленов Чебышева при приближенном решении сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши // Труды ИМ НАН Беларуси, 2001. Т. 9. С. 112 – 118.

1. Расолько Г.А. Прямой метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши при помощи многочленов Чебышева // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2003. № 2. С. 52 – 58.
2. R. Smarzewski, M. A. Sheshko and G. A. Rasolko. Orthogonal approximate solution of Cauchy-type singular integral equations // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM), Vol. 3, N 2, 2003. P. 330 – 356.